

Informationsfusion Übungsaufgaben

Prof. Dr. Ing. Michael Heizmann, Dipl.-Math. Jennifer Sander
Institut für Industrielle Informationstechnik IIT

WS 17/18

Aufgabe 6.1

Objekte sollen aus Sensordaten detektiert und in die beiden Klassen A und B unterschieden werden. Dazu wird eine nominale Zielgröße x definiert, die den Wertebereich $\{x_A, x_B, x_k\}$ besitzt mit

x_A : Objekt vom Typ A vorhanden,
 x_B : Objekt vom Typ B vorhanden,
 x_k : kein Objekt vorhanden.

Zur Beobachtung wird ein Sensor eingesetzt. Dieser liefert ein Ergebnis aus der Menge $\{z_A, z_B, z_k\}$ mit

z_A : Objekt vom Typ A detektiert,
 z_B : Objekt vom Typ B detektiert,
 z_k : kein Objekt detektiert.

Das Beobachtungsmodell $\Pr(z|x)$ ist vollständig festgelegt durch die Übergangswahrscheinlichkeiten (Likelihoodmatrix):

	z_A	z_B	z_k
x_A	0,45	0,45	0,1
x_B	0,45	0,45	0,1
x_k	0,1	0,1	0,8

Es gilt also z. B. $\Pr(z_k|x_k) = 0,8$.

- Geben Sie die A-posteriori-Verteilung $\Pr(x|z_A)$ ($x \in \{x_A, x_B, x_k\}$) an, wenn der Sensor das Ergebnis z_A liefert und kein Vorwissen über x vorliegt.
- In einer zweiten Messung liefere der Sensor erneut das Ergebnis z_A . Berechnen Sie die A-posteriori-Verteilung $\Pr(x|z_A, z_A)$ ($x \in \{x_A, x_B, x_k\}$), wenn kein Vorwissen über x vorliegt und die Ergebnisse des Sensors als bedingt unabhängig angenommen werden können.

Aufgabe 6.2 (Fortsetzung von Aufgabe 6.1)

Neben dem in Aufgabe 6.1 gegebenen Sensor wird ein zweiter Sensor eingesetzt, der ebenfalls die Ergebnismenge $\{z_A, z_B, z_k\}$ besitzt. Das zu diesem zweiten Sensor gehörige Beobachtungsmodell (Likelihoodmatrix) ist wie folgt gegeben:

Informationsfusion – Übungsaufgaben

Seite 1 von 5

A1a) Bay'sche Formel

$$\Pr(x|z_A) = \frac{\Pr(z_A|x) \Pr(x)}{\Pr(z_A)}$$

$$= \alpha \Pr(z_A|x) \cdot \Pr(x)$$

α wird gewählt so dass $\sum_{x=x_A, x_B, x_k} \Pr(x|z_A) = 1$

Für $\Pr(x)$ muss eine Wahrscheinlichkeitsverteilung angenommen werden. Da wir nichts wissen $\rightarrow$ Gleichverteilung

$$\Pr(x) = \frac{1}{3} \text{ für } x_A, x_B, x_k$$

$$\Pr(x) = [\Pr(x_A), \Pr(x_B), \Pr(x_k)] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$$

$$\Pr(x|z_A) = \alpha [0,45; 0,45; 0,1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0,45; 0,45; 0,1]$$

b) Bay'sche Formel erweitern:

$$\Pr(x|z_A, z_A) = \frac{\Pr(z_A, z_A|x) \Pr(x)}{\Pr(z_A, z_A)} = \frac{\Pr(z_A|x) \Pr(z_A|x) \Pr(x)}{\Pr(z_A) \Pr(z_A)}$$

$$= \beta' \Pr(z_A|x)^2 = [0,45^2; 0,45^2; 0,1^2] \beta'$$

$$= \beta' \cdot [0,2025; 0,2025; 0,01] \quad \Rightarrow \beta' = \frac{1}{2 \cdot 0,2025 + 0,01}$$

$$= [0,488; 0,488; 0,024]$$

	z_A	z_B	z_k
x_A	0,45	0,1	0,45
x_B	0,1	0,45	0,45
x_k	0,45	0,45	0,1

- Unterscheiden sich die beiden Sensoren in ihrer Detektions- und Klassifikationsleistung?
- Die Ergebnisse der beiden Sensoren werden mittels zentralisierter Fusion kombiniert. Welche Zusatzannahme muss erfüllt sein, damit die Fusion mit den gegebenen Informationen erfolgen kann? Geben Sie für diesen Fall die kombinierten Likelihoodmatrizen $\Pr(z^{(1)}, z^{(2)}|x)$ mit
 $z^{(1)}$: Ergebnis des Sensors 1,
 $z^{(2)}$: Ergebnis des Sensors 2 an.
- Über x liege kein Vorwissen vor. Berechnen Sie mittels zentralisierter Fusion die A-posteriori-Verteilung von x für die folgenden Fälle:
a. Sensor 1 liefert z_A , Sensor 2 liefert z_A ;
b. Sensor 1 liefert z_A , Sensor 2 liefert z_B ;
c. Sensor 1 liefert z_A , Sensor 2 liefert z_k .
- Beide Sensoren liefern z_A . Wie lässt sich die A-posteriori-Verteilung von x mit verteilter Fusion berechnen?
Nehmen Sie an, dass Sensor 2 eine zusätzliche Beobachtung z_k macht. Berechnen Sie auch für diesen Fall die A-posteriori-Verteilung von x mittels verteilter Fusion.

Aufgabe 6.3 (Fortsetzung von Aufgabe 6.2)

Im Folgenden seien die beiden Sensoren durch ihre Log-Likelihoodmatrizen gegeben.

Sensor 1 besitzt das Beobachtungsmodell $\ln(\Pr(z^{(1)}|x))$:

	z_A	z_B	z_k
x_A	-0,799	-0,799	-2,303
x_B	-0,799	-0,799	-2,303
x_k	-2,303	-2,303	-0,233

Sensor 2 besitzt das Beobachtungsmodell $\ln(\Pr(z^{(2)}|x))$:

	z_A	z_B	z_k
x_A	-0,799	-2,303	-0,799
x_B	-2,303	-0,799	-0,799
x_k	-0,799	-0,799	-2,303

Informationsfusion – Übungsaufgaben

Seite 2 von 5

bedeutet stochastisch

$$\Pr(z^{(1)}, z^{(2)}|x) = \Pr(z^{(1)}|x) \cdot \Pr(z^{(2)}|x)$$

$\Rightarrow$ z.B. 3 Tabellen angeben

$$\text{für } z^{(1)} = z_A \quad z^{(2)} = z_B \quad z^{(2)} = z_k$$

Oder Vektoren in Tabelle

$$x_A \begin{pmatrix} z_A z^{(1)} \\ (0,2025; 0,2025; 0,045) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_B \\ (0,045; 0,045; 0,01) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_k \\ (0,2025; 0,2025; 0,045) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Summe der Zeilen muss 1 sein (das sind ja alle mögliche Ausprägung z.B. von x_A)

Es liege weiterhin kein Vorwissen über x vor, die Beobachtungen seien bedingt stochastisch unabhängig. Beide Sensoren machen die Beobachtung z_A . Berechnen Sie die Log-A-posteriori-Verteilung $\ln(\Pr(x|z_A, z_B))$.

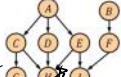
Aufgabe 6.4

Ein Patient geht zum Arzt, um untersucht zu lassen, ob er an einer schweren Krankheit leidet. Es ist bekannt, dass ein Prozent der Bevölkerung an dieser Krankheit leidet.

- a) Der Arzt führt einen Test durch. Die Erkennungsrate des Tests liegt bei 90 % (d. h. leidet ein Patient an der Krankheit, so liefert der Test für diesen Patienten mit Wahrscheinlichkeit 0,9 das Ergebnis „erkrankt“). Die Falschalarmrate des Tests beträgt 20 % (d. h. wird ein nicht erkrankter Patient getestet, so liefert der Test mit Wahrscheinlichkeit 0,2 das Ergebnis „erkrankt“). Das Ergebnis dieses Tests ist „erkrankt“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient tatsächlich unter der Krankheit leidet?
- b) Der Arzt führt nun einen zweiten, vom ersten bedingt unabhängigen Test durch. Die Erkennungsrate dieses Tests liegt bei 80 %. Die Falschalarmrate des Tests beträgt 30 %. Das Ergebnis aus dieses Tests ist „erkrankt“. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient tatsächlich unter der Krankheit leidet?

Aufgabe 6.5

Betrachtet wird folgendes Bayes'sches Netz:



- a) Zunächst ist keine Evidenz verfügbar. Von welchen Zufallsvariablen ist H d-separiert?
- b) Über I wird weiche Evidenz verfügbar. Von welchen Zufallsvariablen ist H d-separiert?
- c) Über D und E wird zusätzlich harte Evidenz verfügbar. Von welchen Zufallsvariablen ist H d-separiert? *nur B, F über C noch offen*

Informationsfusion – Übungsaufgaben

Seite 3 von 5

- d) Nun wird zusätzlich über C harte Evidenz verfügbar. Von welchen Zufallsvariablen ist H d-separiert?

Aufgabe 6.6 (Das Startproblem (nach Jensen, Nielsen: Bayesian Networks and Decision Graphs))

Es soll analysiert werden, warum der Motor eines Kfz nicht startet. Als mögliche Ursachen werden fehlender Treibstoff und verschmutzte Zündkerzen berücksichtigt. Die Tankanzeige gibt einen Hinweis auf das Vorhandensein von Treibstoff.

Die betrachteten Zufallsvariablen sind demnach:

	Formelzeichen	Wertemenge
Treibstoff vorhanden	T	{ja, nein}
Treibstoffanzeige	A	{voll, halb, leer}
Zündkerzen sauber	Z	{ja, nein}
Motor startet	M	{ja, nein}

- a) Die Zusammenhänge zwischen den Zufallsvariablen werden durch folgende Aussagen vollständig beschrieben:
- Das Vorhandensein von Treibstoff und die Sauberkeit der Zündkerzen haben einen Einfluss, ob der Motor startet.
 - Die Treibstoffanzeige ist davon abhängig, ob Treibstoff vorhanden ist.
- Skizzieren Sie ein Bayes'sches Netz, das diese Zusammenhänge beschreibt.
- b) Bestimmen Sie die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen.
- c) Zeigen Sie, dass in diesem Netz die Zufallsvariablen T und Z unabhängig sind.
- d) Für die Zufallsvariablen sind folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen bekannt:

$\Pr(T)$
$T = \text{ja}$ 0,98
$T = \text{nein}$ 0,02

$\Pr(Z)$
$Z = \text{ja}$ 0,96
$Z = \text{nein}$ 0,04

$\Pr(A T)$	$T = \text{ja}$	$T = \text{nein}$
$A = \text{voll}$	0,39	0,001
$A = \text{halb}$	0,60	0,001
$A = \text{leer}$	0,01	0,998

$\Pr(M T, Z)$	$T = \text{ja}$	$T = \text{nein}$
$Z = \text{ja}$	(0,99; 0,01)	(0; 1)
$Z = \text{nein}$	(0,01; 0,99)	(0; 1)

Für $\Pr(M|T, Z)$ sind jeweils die Werte für $M = \text{ja}$ und $M = \text{nein}$ angegeben. Berechnen Sie die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung $\Pr(A, T, M, Z)$. Hinweis: Verwenden Sie zur Darstellung dieser vierdimensionalen Verteilung zwei Tabellen für $M = \text{ja}$ und $M = \text{nein}$. Tragen Sie in jeder Tabelle dann jeweils die Werte für $T = \text{ja}$ und $T = \text{nein}$ ein.

Informationsfusion – Übungsaufgaben

Seite 4 von 5

6.4 a)

$$0,99 \cdot 0,2 = 0,198$$

$$0,01 \cdot 0,9 = 0,009$$

$$\begin{matrix} & z_k & z_g \\ x_k & 0,9 & 0,1 \\ x_g & 0,2 & 0,8 \end{matrix}$$

Zeilen müssen summiert sein

$$P_r(x) = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ x_g & x_k \end{bmatrix}$$

$$P_r(x_k | z_k) = \frac{P_r(z_k | x_k) \cdot P_r(x_k)}{P_r(z_k)}$$

$$= \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,207} = \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,207} = 0,043$$

$$P_r(z_k) = \sum_x P_r(x, z_k) = \sum_x P_r(z_k | x) \cdot P_r(x)$$

$$= P_r(z_k | x_k) \cdot P_r(x_k) + P_r(z_k | x_g) \cdot P_r(x_g)$$

$$= 0,207$$

6.5)

$$\begin{matrix} \textcircled{T} & & \textcircled{Z} \\ \downarrow & \searrow & \swarrow \\ \textcircled{A} & & \textcircled{M} \end{matrix} \quad \begin{matrix} P_r(A, T, Z, M) \\ = P_r(T) \cdot P_r(Z) \cdot P_r(A|T) \cdot P_r(M|T, Z) \end{matrix}$$

$$P_r(T, Z) = \sum_A \sum_M P_r(A, T, Z, M)$$

$$= \sum_A \sum_M P_r(T) \cdot P_r(Z) \cdot P_r(A|T) \cdot P_r(M|T, Z)$$

$$= P_r(T) \cdot P_r(Z) \cdot \sum_M (P_r(M|Z, T)) \cdot \sum_A P_r(A|T)$$

$$\text{denn ist } \underbrace{\sum_M (P_r(M|Z, T))}_{=1} \cdot \underbrace{\sum_A P_r(A|T)}_{=1} = 1$$

die Unabhängigkeit gezeigt

! Bayes'sche Netz neu dieses Jahr

e) Der Motor startet nicht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zündkerzen nicht sauber sind.

f) Der Motor startet immer noch nicht. Die Treibstoffanzeige zeigt einen halb gefüllten Tank an. Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Zündkerzen nicht sauber sind.